



TITLE:

ヴォートンによる渦運動の研究(ナビエ・ストークスの方程式の解)

AUTHOR(S):

桑原, 真二

CITATION:

桑原, 真二. ヴォートンによる渦運動の研究(ナビエ・ストークスの方程式の解). 数理解析研究所講究録 1984, 539: 57-72

ISSUE DATE:

1984-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98732>

RIGHT:

ヴォートンによる渦運動の研究

名大 工学部 桑原真二

(KUWABARA Sinzi)

§1. まえおき

ここでは縮まない完全流体の渦運動を考える。このように流れにおいて、渦糸の微小部分が初期に長さベクトル $d\hat{x}$, 渦度 $\hat{\omega}$, 断面積 $\hat{\sigma}$ をもち, 時刻 t でそれぞれ $d\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\omega}$, σ になったとすれば

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{x} // \boldsymbol{\omega} \quad (d\hat{x} // \hat{\omega}) \\ \hat{\omega} \hat{\sigma} = \omega \sigma \equiv \Gamma, \quad \hat{\sigma} d\hat{s} = \sigma ds \quad (ds = |d\mathbf{x}|) \end{aligned} \right\} (1.1)$$

が成立つ。すなわち渦糸はいつも同じ実質部分からなり、渦の強さ Γ は保存すると考えられる。それ故渦糸はいつまでも同位性を保っている。これが渦糸モデルの基礎をなしている。

実際の渦運動では渦のつなぎかえが起る。これは転位による渦度の拡散が本質的である。この現象を渦糸モデルによってシミュレートするには、物理的考察をまいてつなぎかえを人工的に行ってやる必要がある。

vortexon という言葉は Saffman^(*) の創作と思われすがここでは次のように理解する。渦場を多くの細胞に分割し、一つの細胞を代表する位置と渦度と体積によって特徴づけられ

るものと仮定する。そしてこれらの量の時間的发展を Lagrange 的に追跡する。このようなモデルでは渦系の連続性は表わき現れないが、近似的に成立っている。渦の存在にかえも、渦度の拡散又はそれに相当する効果（例えば、衝撃波における von Neumann-Richtmeyer の方法のような）を計算スキームにふくめれば、渦系モデルよりスムーズに行うことが出来るように考えられる。

渦運動ではヘリシティ $H(t)$ と エネルギー $E(t)$ という量が重要と考えられる。各々

$$H(t) = \iiint \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x} \quad (1.2)$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \iiint \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)^2 d^3\mathbf{x} \quad (1.3)$$

で定義される。ヘリシティの時間変化を考えよう。まず

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} d^3\mathbf{x} &= \iiint_V \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} \omega_\alpha + v_\alpha \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial t} \right) d^3\mathbf{x} \\ &= \iiint_V \left[\left(-v_\beta \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} \right) \omega_\alpha + v_\alpha \left(-v_\beta \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_\beta} + \omega_\beta \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} \right) \right] d^3\mathbf{x} \\ &= \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{p}{\rho} \omega_\alpha - v_\alpha v_\beta \omega_\beta + \frac{1}{2} v_\beta v_\beta \omega_\alpha \right) d^3\mathbf{x} \\ &= \iiint_V \operatorname{div} \left(\frac{p}{\rho} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2} v^2 \boldsymbol{\omega} \right) d^3\mathbf{x} \\ &= \iint_{\partial V} \left(\frac{p}{\rho} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2} v^2 \boldsymbol{\omega} \right) \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (1.4)$$

が成立つ。今 $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} \neq 0$ の領域が有界で、無限遠で (1.4) の

最後の項が 0 となると仮定すれば

$$\iiint \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} d^3x = \frac{d}{dt} \iiint \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} d^3x = \frac{d H_L}{dt} = 0 \quad (1.5)$$

が成立ち、上に述べた条件 ($\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}$ が 0 の領域が有界。無限遠からの H_L への寄与がない) を満足すれば、ヘリシティは時間的に不変である。

§2. ヴォートン力学の基礎方程式

縮まない流体の渦運動では、縮まない条件 $\text{div } \mathbf{v} = 0$ から速度場は (副条件を伴う) ベクトル・ポテンシャル $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ にわけて

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \text{rot } \mathcal{C}(\mathbf{x}) \\ \text{div } \mathcal{C} &= 0 \quad (\text{副条件}) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

で表わされ、渦度の定義 $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ より \mathcal{C} は

$$\nabla^2 \mathcal{C} = -\boldsymbol{\omega} \quad (2.2)$$

を満足する。無限に広い空間で、無限遠からの効果が無いとすれば

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{r} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') d^3x' \quad r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \quad (2.3)$$

したがって、速度は

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{r^2} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') \times \mathbf{r} d^3x' \quad (2.4)$$

で表わされる。これを Lagrange 表現で表わせば

$$\mathbf{v}(\mathbf{a}, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint \boldsymbol{\omega}(\mathbf{a}', t) \times \mathbf{r} / r^3 d^3a' \quad (2.4')$$

となる。(2.4') では

$$\left. \begin{aligned} v(x(a,t), t) &= v(a, t) \\ \omega(x(a,t), t) &= \omega(a, t) \\ p &= x(a, t) - x(a', t) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

で表わしている。

流体粒子の運動と渦度の Lagrange 的变化は

$$\frac{Dx}{Dt} = v(x, t) \quad (2.6)$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\omega \cdot \text{grad}) v(x, t) \quad (2.7)$$

で表わされる。(2.6) (2.7) の右辺の v に (2.4) を代入し、

Lagrange 表現で表わせば

$$\frac{D}{Dt} x(a, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint \omega(a', t) \times p \frac{1}{r^3} d^3 a' \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \omega(a, t) &= \frac{1}{4\pi} \iiint \left[\frac{1}{r^3} \omega(a', t) \times \omega(a, t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{25} \omega(a', t) \times p (p \cdot \omega(a, t)) \right] d^3 a' \end{aligned} \quad (2.9)$$

をうる。

連続した渦場を多くの細胞に分割し、各細胞を代表点の位置、渦度、体積で特徴づけられると仮定し、その運動を Lagrange 的に追跡する。各細胞は l で番号づけられ、その Lagrange 座標は l の t における位置は

$$a = A(l), \quad x = X(l, t) \quad (2.10)$$

で、又その渦度は

$$\omega(x, t) = \sum_l \Omega(l, t) \delta^3(x - X(l, t)) \nabla(l) \quad (2.11)$$

4

$$\omega(a, t) = \sum_l \Omega(l, t) \delta^3(a - A(l)) V(l) \quad (2.11)$$

で表わされしものとす。こゝで $V(l)$ は細胞 l の体積で、縮まない流体を考えているから、時間的に一定である。更に特性関数を

$$A(l, a) = \begin{cases} 1 & a \in \text{細胞 } l \\ 0 & a \notin \text{細胞 } l \end{cases} \quad (2.12)$$

で定義する。まず (2.8) に $\delta^3(a - A(l))$ をかけ、(2.12) に

(2.12) をかけて a で積分すると各々

$$\frac{D}{Dt} X(l, t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l'} \frac{V(l)}{|X(l, t) - X(l', t)|^3} \Omega(l', t) \times (X(l, t) - X(l', t)), \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \Omega(l, t) = & \frac{1}{4\pi} \sum_{l'} \left[\frac{\Omega(l', t) \times \Omega(l, t)}{|X(l, t) - X(l', t)|^3} \right. \\ & - \frac{3}{|X(l, t) - X(l', t)|^5} \Omega(l', t) \times (X(l, t) - X(l', t)) \\ & \left. (\Omega(l, t) \cdot (X(l, t) - X(l', t))) \right] V(l') \end{aligned} \quad (2.14)$$

をうる。(2.13), (2.14) がヴォーゴートの基礎方程式である。

ヴォーゴート方程式の方程式を上のように a についての積分でなく、 x についての積分でも行うことが出来る。すなわち、 ω として (2.11), 特性関数として (2.12) で $a \in x$ に代えてもの、(2.8) に $\delta^3(x - X(l, t))$ をかけて x についての積分する等の変更を行うものである。しかし、前者の方が直截簡明で

あり。

§3. 乱流境界層におけるバーストのヴォートン・モデルによる解析

今まで渦系モデルで行ってきたように²⁾、乱流境界層を流れる方向(x)には変化しない、 y (≥ 0) だけに依存する(実験式でなくこれらの平均流をもつ縮まない粘性のない渦運動とみなす。初期に壁($y=0$)から有限の高さ h の、 x 方向には無限に長い領域の平均流を、 y 方向に無限に長い断面 $a_1 \times a_2$ ($N_2 a_2 = h$) の渦管に分割し、更に渦管をその中心に渦系を置いて近似する。つまり、 y 方向に等間隔に配列した渦列で近似したことになる。そして1列の渦列は同じ強さの x 方向に等間隔に無限に列んだ渦系よりなる。その強さは渦列のある場所の平均流の速度の配に比例するから、各渦列によって与える。壁における流れ速度0の境界条件は、上述の渦系の鏡像をとることによって満足される(鏡像は $y \leq 0$ に存在する)。これまでの近似段階において各渦列は他の渦列 ($0 \leq |y| \leq h$) と連続な渦度 ($|y| > h$) からの誘導速度によって x 方向に等速度で移動する。

まずこの渦系系を適当な有限個の自由渦系群と無変形渦系群に分ける。自由渦系群に初期に擾動を加えてその後のふる

まゝを追跡する。非変形渦系群は擾動を加えない場合の速度で移動する。各自由渦系の ($x=0$ を中心にした) 2×3^M の中の部分を等間隔に $2N_2 + 1$ 個のヴォートンでおまかえる。ヴォートンの発展するうちヴォートンの移動と渦度の变化はヴォートン間の相互作用、自由渦群のヴォートン以外の部分、非変形渦系群、連続的に分布した渦場 ($|y| > a$) からの寄与からなる。ヴォートン間の相互作用は (2.13) (2.14) によって表わされる。

こゝで自由渦系を $3 \times 3 = 9$ 本とす

$$a_1 = 10, \quad a_2 = a_3 = 5$$

とおいた。 a_1, a_2, a_3 はおのおの渦列中の渦系の間隔、渦列の間隔、1本の自由渦系上のヴォートンの間隔で、すべて初期における値である。長さは境界層底面における接線応力から計算した「摩擦長さ」で規格化してある。1本の自由渦系中のヴォートンの数は21である。初期に渦系は

$$\left. \begin{aligned} x &= a_1 l_1, \quad -\infty < l_1 < \infty \\ y &= (|l_2| + \frac{1}{2}) a_2, \quad l_2 = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

にある。自由渦系は初期に平行4辺形

$$\left. \begin{aligned} -a_1 - \frac{a_1}{a_2} (y - 2.5 a_2) &\leq x \leq a_1 - \frac{a_1}{a_2} (y - 2.5 a_2) \\ 1.5 a_2 &\leq y \leq 3.5 a_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

の内部にある。 $x=0$ ($l_1=0$), $y=2.5 a_2$ ($l_2=2$) にあ

の渦系 (ウォートン) に

$$x = \varepsilon e^{-z^2/\sigma^2} \cos \varphi$$

$$y = \varepsilon e^{-z^2/\sigma^2} \sin \varphi$$

のように変形し、渦度は

$$\omega_1 = -\omega_3 \frac{z}{\sigma^2} \varepsilon e^{-z^2/\sigma^2} \cos \varphi$$

$$\omega_2 = -\omega_3 \frac{z}{\sigma^2} \varepsilon e^{-z^2/\sigma^2} \sin \varphi$$

$$\omega_3 = -\Gamma_2 / (a_1 a_2)$$

で与えられる。この計算では

$$z=1, \quad \sigma=10, \quad \varphi=90^\circ$$

と取った。 Γ_2 は擾乱を与える渦列 ($l_2=2$) の渦系の循環である。

以上の初期条件のもとに計算を行った結果が第3図に (a) 右側に斜め方向からの立体図, (b) 側面図として示してある。第2図には (a) 自由渦系群の変形部分のエンストロフィー (b) ヘリシティの時間変化が示してある。計算は $t=30$ まで行ったが、9本の自由渦系群では、 $t>15$ で近似があまりよくないと考えられる。

§4. 絡った2つの渦輪の運動

今 x, y 面内、 y, z 面内にある、おのおのの中心を原点、(1, 0, 0) にもつ、半径 a 、断面半径 b 、循環 Γ の絡った2つの等し

い渦輪を考へる。渦輪はそれ自身その面に垂直な方向に移動速度をもっている。そこで、この場合垂直方向に移動速度をもっているからあき間隔を、非常に接近した部分が現れるであろう。このような状態において2つの渦輪は合体するか、通りぬけするか、不安定になるか興味ある問題である。

長さ a で、時間 $\pi b^2/\Gamma$ で速さ $\Gamma a/\pi b^2$ で、渦度を $\Gamma/\pi b^2$ で規格化する。 $b/a = 0.1$, 1つの渦輪を16に分割し、上述の状態を初期条件として行った計算結果を次の図に示す。
 $\Delta t = 0.1$ で $t = 30$ まで行つたが、 $t = 4$ 附近に「不安定」その後、いくつかのヴォーTONの渦度が極端に大きくなる。次の図に (a) エンストロフィー (b) ヘリシティの時間的変化が示してある。ヘリシティは $t = 4$ まで大体一定である。

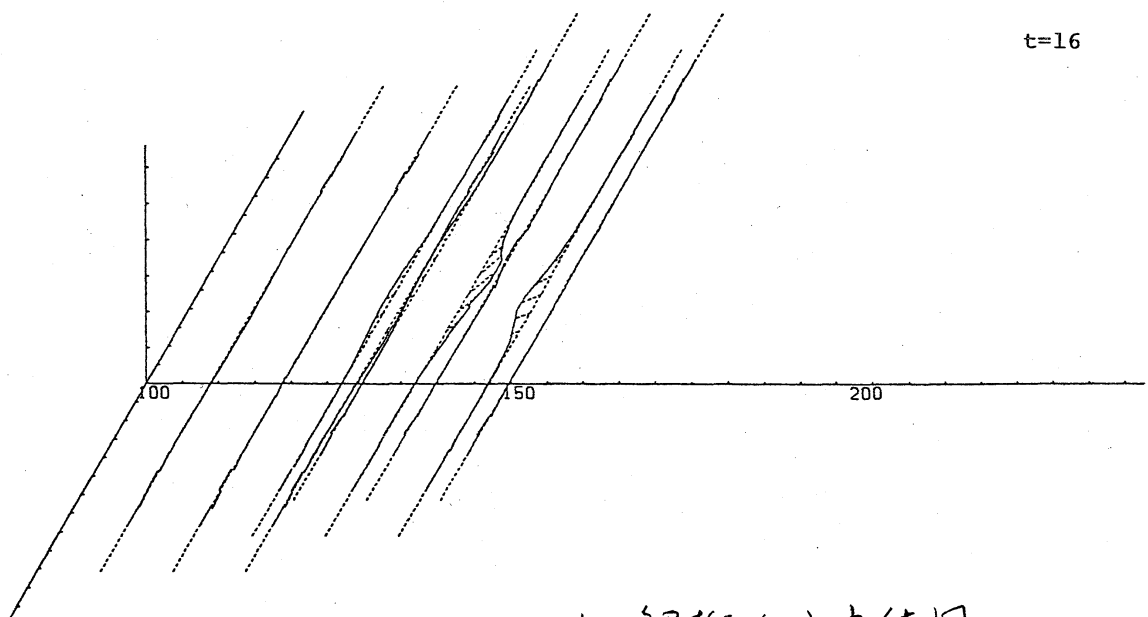
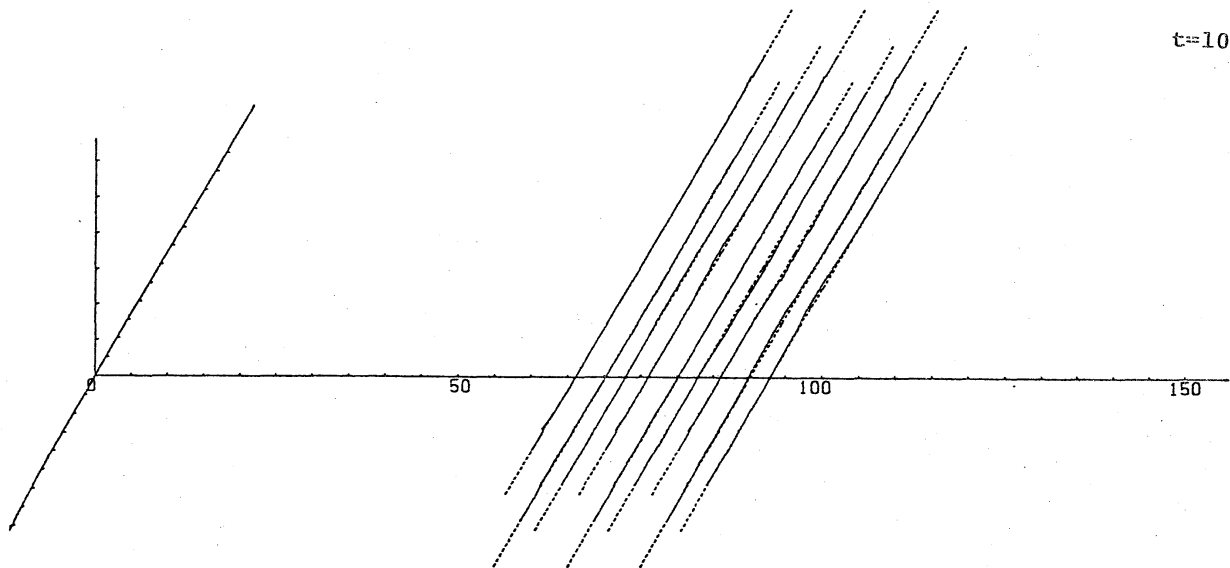
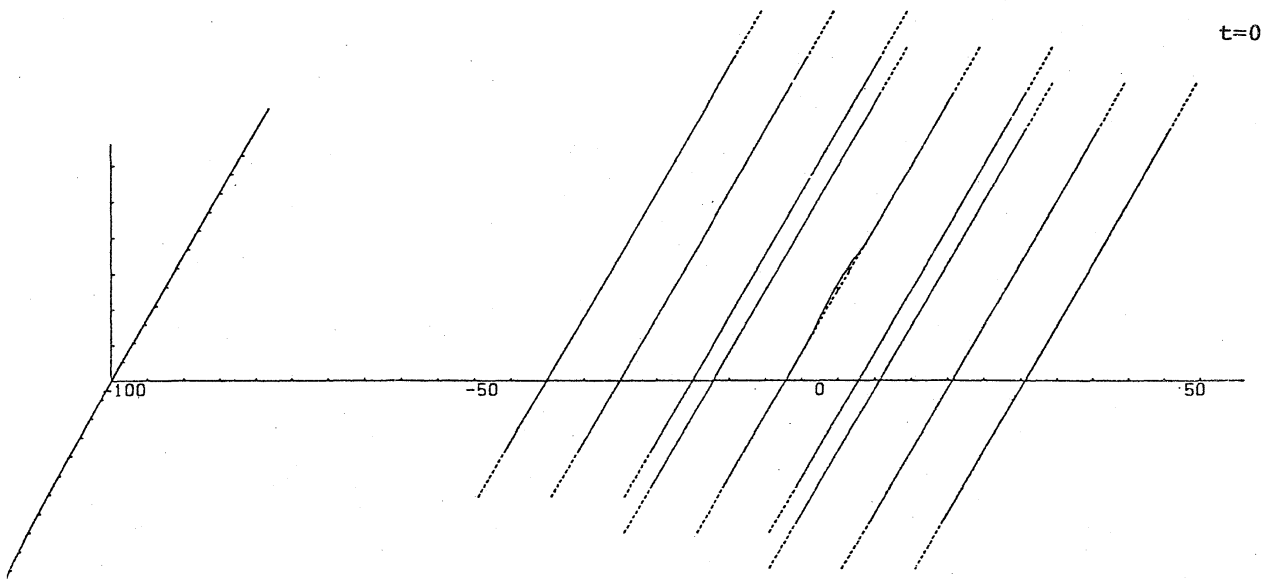
5.5. おしまひ

この論文ではヴォーTON力学の基礎方程式を、渦場を細胞に分割し、各細胞の特徴を代表する位置、渦度、体積で表現できるとして近似し、連続体としての流体の方程式から導いた。例題として乱流境界層のバーストと終つた2つの渦輪の問題を取扱つた。両者において渦のつなぎかえは起つていない。ヴォーTONが近づくに渦度が急速に大きくなり、不安定になる現象が起るように思われる。渦のつなぎかえには計算

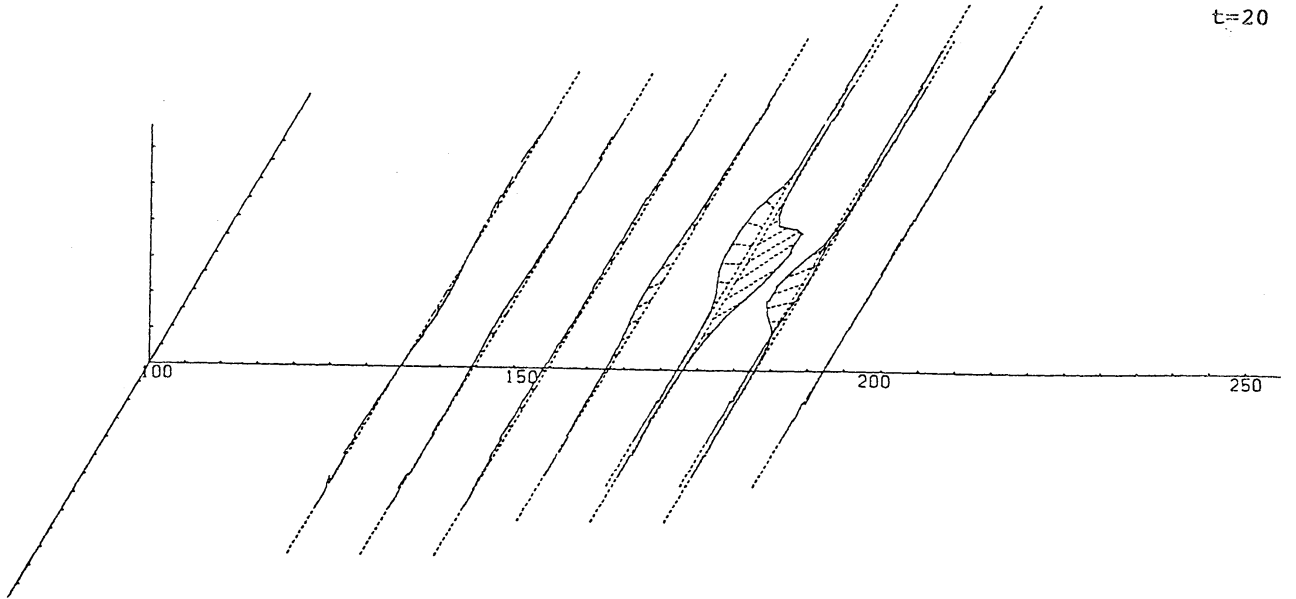
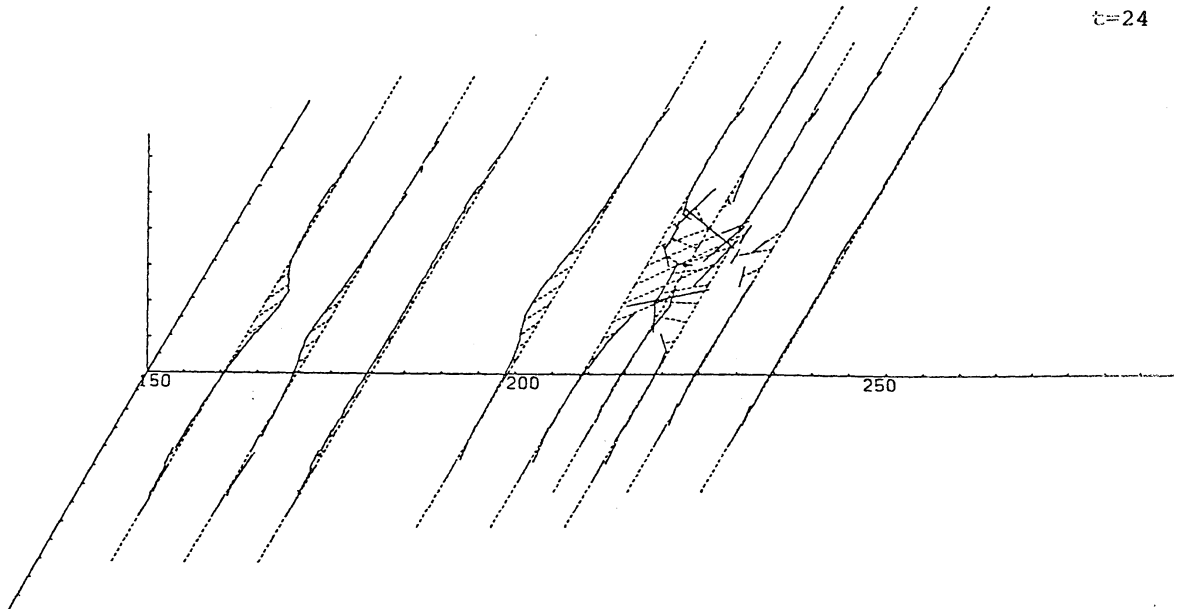
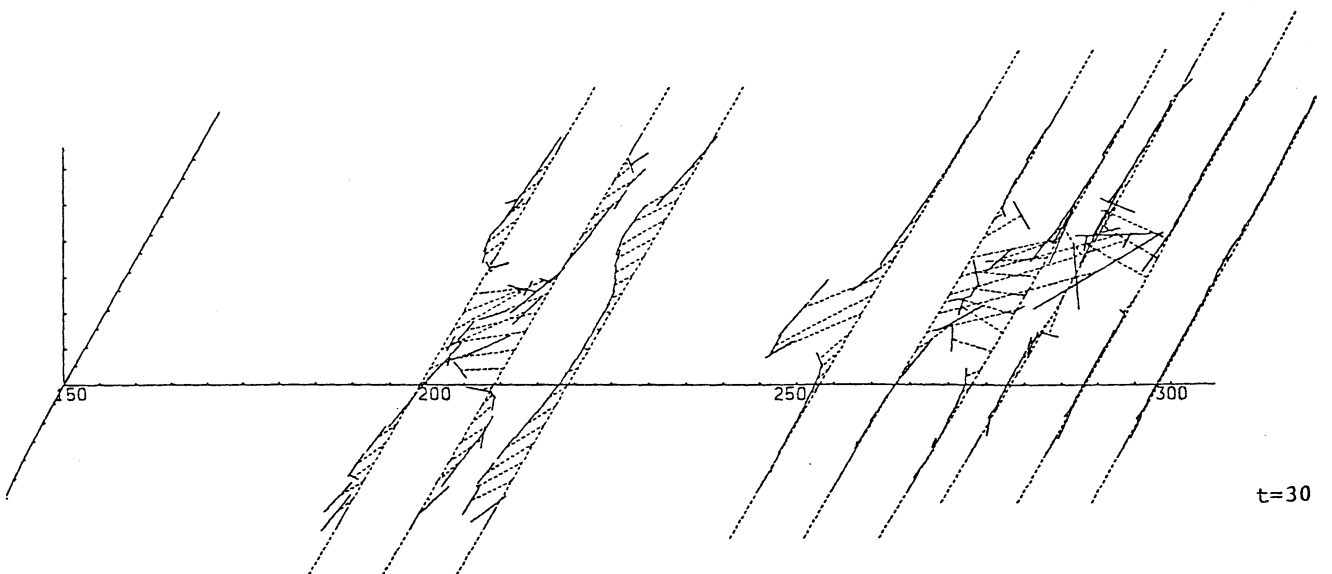
入キ一4に何らかの渦度の拡散の効果を入れねば表わせないように思われる。

参考文献:

- 1) F. T. Beale & A. Majda: Math. Comp 39 (1982) I, 1-27: II, 29-52.
- 2) 桑原真二: 日本流体力学全集 2 (1983) 177-187.
- 3) E. A. Novikov: Sov. Phys. JETP 57 (1983) 566-569.
- 4) P. G. Saffman: Vortex interactions and coherent structures in turbulence, in Transition and Turbulence (1981, Academic Press) 149-165.

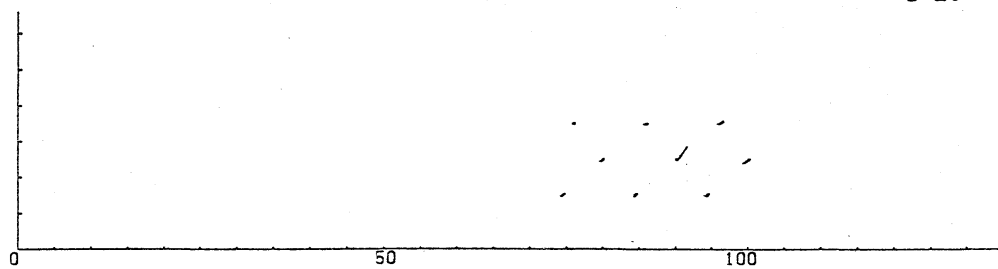


第1回 ウォートン1283バーストの解析(a) 立体図

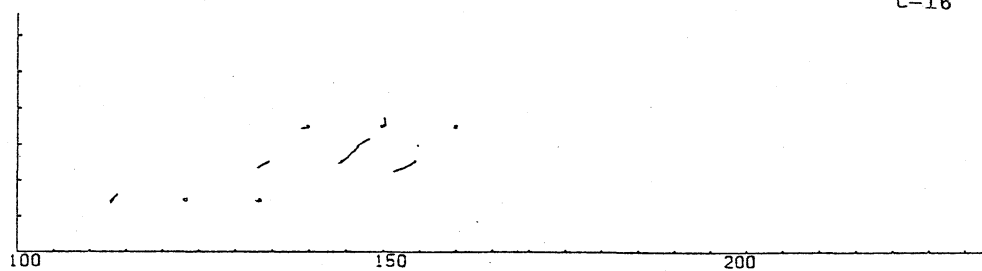
$t=20$  $t=24$  $t=30$ 

第1圖(a) 續

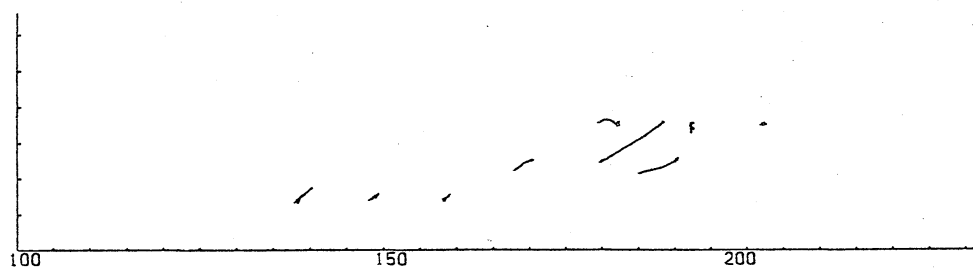
t=10



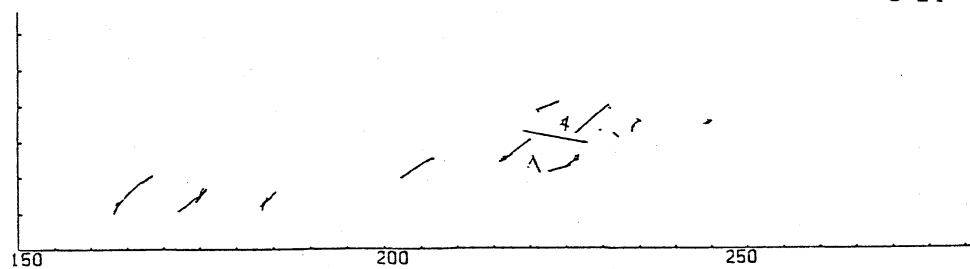
t=16



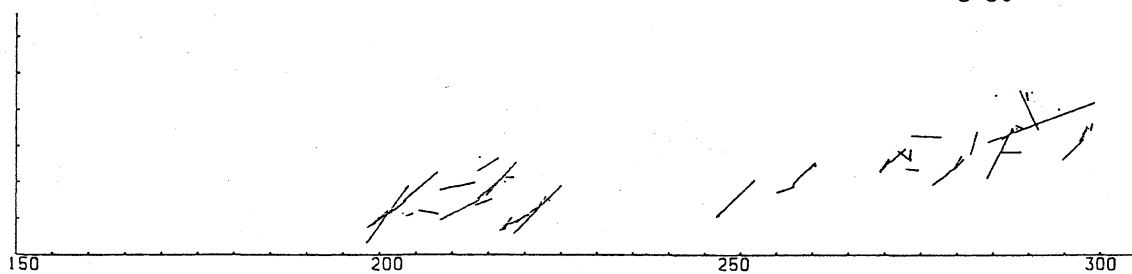
t=20



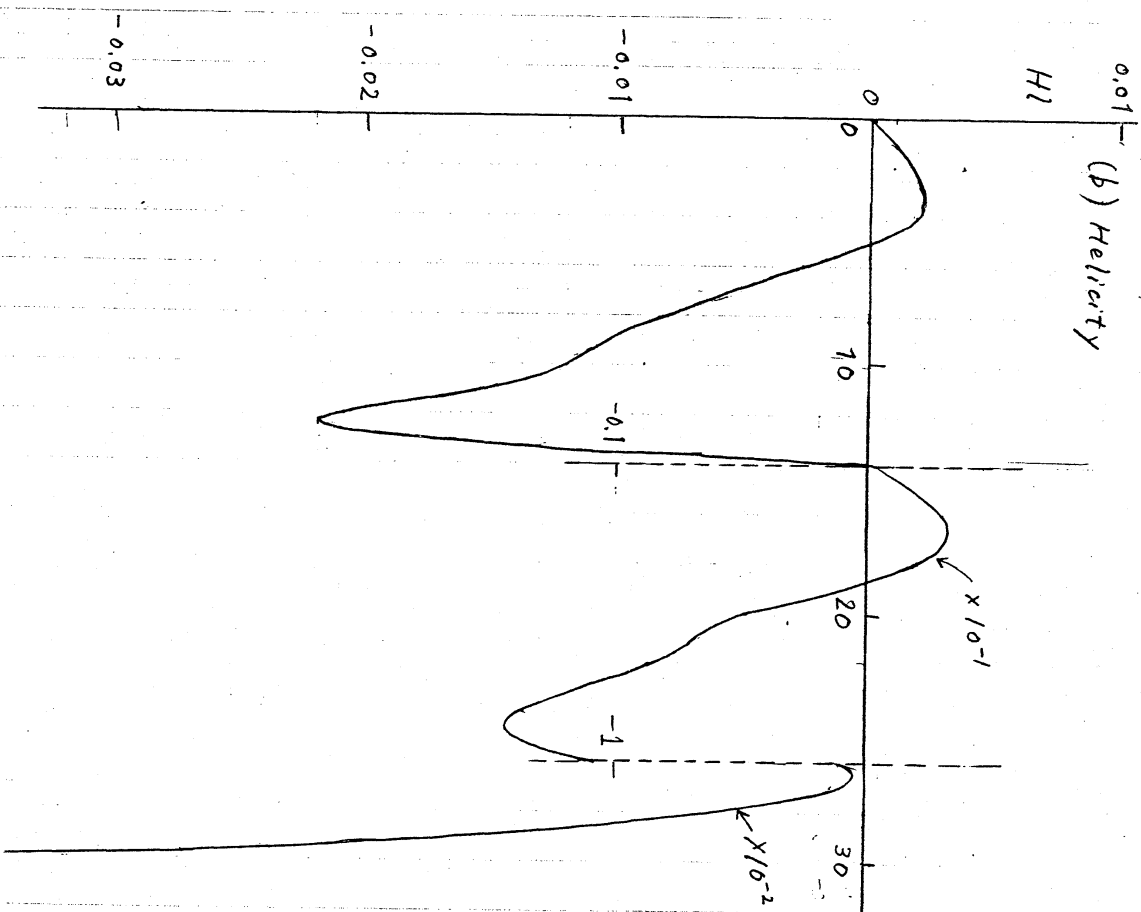
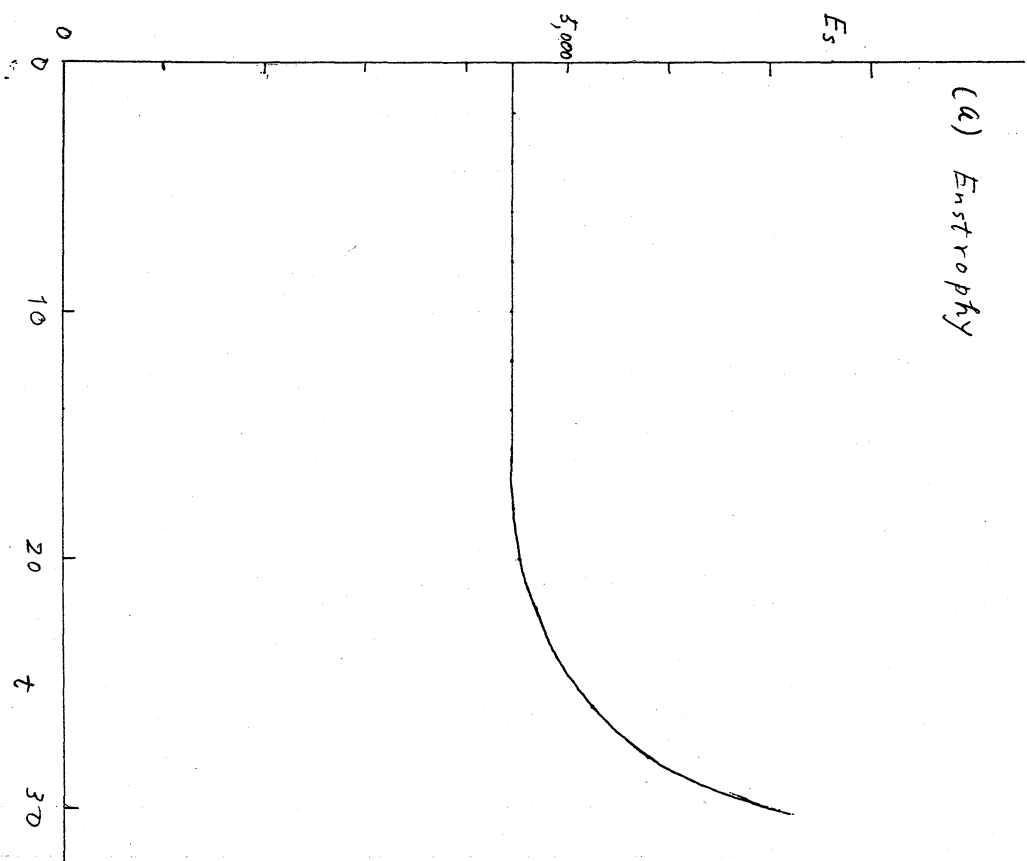
t=24



t=30



第1図 ウォートンによるバーストの解析 (b) 側面図



第2圖 ハーベットの (a) エンストロフィー (b) ヘルシティの時間的変化。

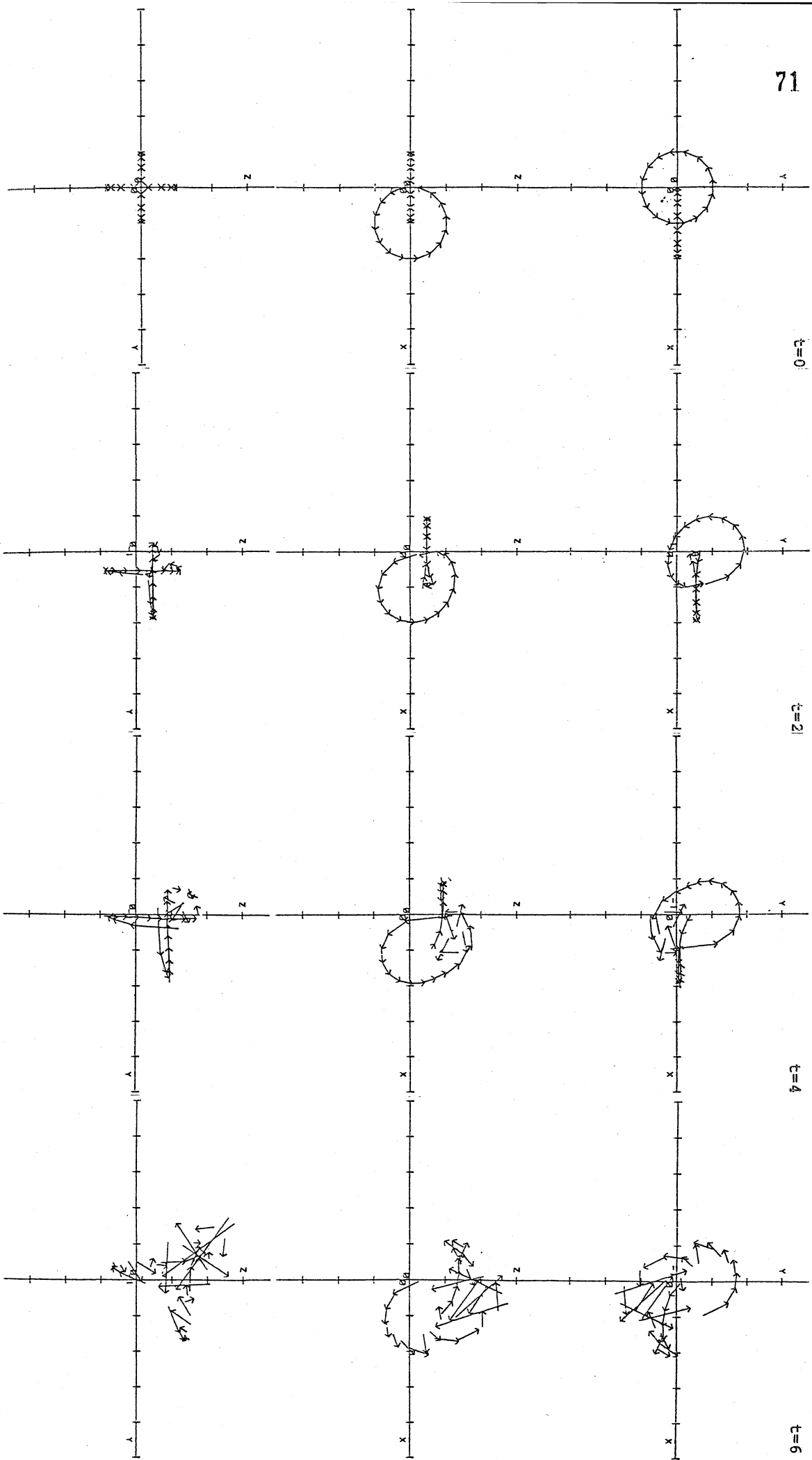


図3. ヴォーテンの渦の2つの渦輪の解析

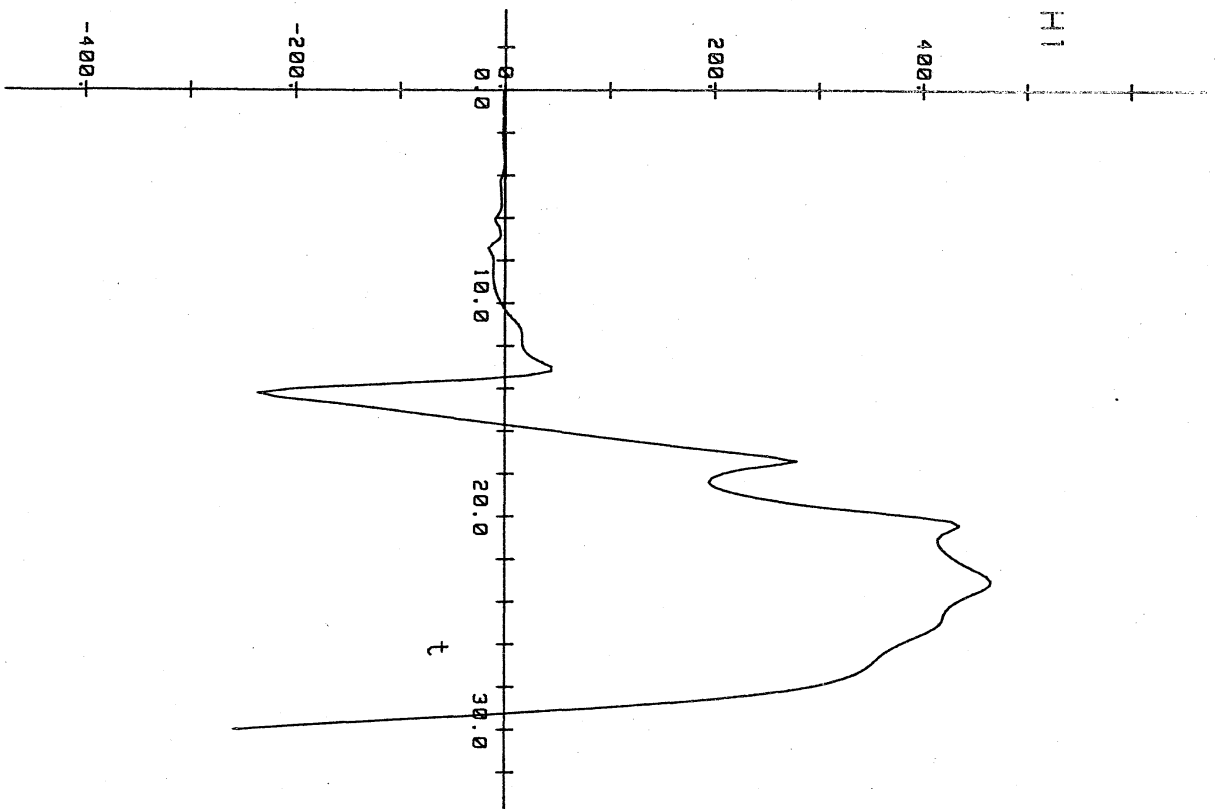
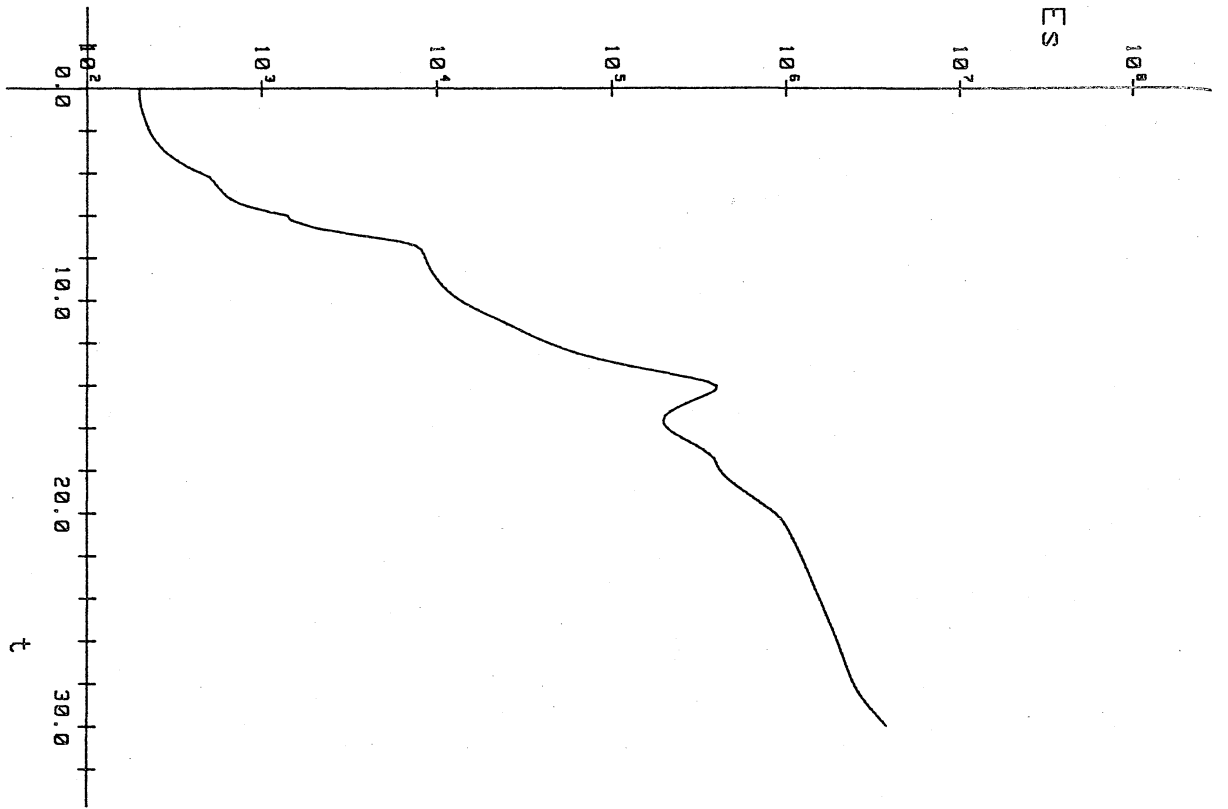


图4. 在2200周波の振動の時間的变化